## استدراكية 2008

نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2)\quad x*y = x+y-3xy$$

1) أ- تحقق أن $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

ب- بين أن $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية

2) أ- نعتبر التطبيق $\varphi\ \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}^*$

$x\to\varphi(x)=1-3x$

بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

ب- بين أن $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{+*})=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

ج- بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية من $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$

3) ليكن $x$ من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و $n$ عدد طبيعي من $\mathbb{N}$.

نضع : $x^{(0)}=0$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$

أ- بين أن :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)(\forall n\in\mathbb{N})\quad \varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$$

ب- استنتج $x^{(n)}$ بدلالة $x$ و $n$

4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $\mathrm{T}$ المعرف بما يلي : $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad x\mathrm{T}y=x+y-\frac{1}{3}$

أ- بين أن $(\mathbb{R},\mathrm{T})$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(\mathbb{R},*,\mathrm{T})$ جسم غير تبادلي

## العادية 2009

$M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ . ونعتبر المجموعة $F$ للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

1) أ- بين أن $F$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب- بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية

2) لتكن $G$ مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $F$ حيث أن $x\in\mathbb{R}^*$ . بين أن $G$ زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$

3) نضع $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

نزود $E$ بقانون تركيب داخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$\left(\forall((x,y),(a,b))\in E^2\right)\ (x,y)\perp(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$$

و نعتبر التطبيق : $\varphi:(F,\times)\to(E,\perp)$

$M(x,y)\to(x,y)$

أ- أحسب $(1,1)\perp(2,3)$ و $(2,3)\perp(1,1)$

ب- بين أن التطبيق $\varphi$ تشاكل تقابلي

ج- استنتج بنية $(E,\perp)$

## استدراكية 2009

$M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

و $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

و لتكن $V$ مجموعة المصفوفات والتي تكتب على

$M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) بين أن $(V,+,\cdot)$ فضاء حقيقي محدد بعده

2) أ- بين أن $V$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب- بنية $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية

3) أ- أحسب $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

ب- هل $(V,+,\times)$ جسم ؟

4) لتكن $X$ مصفوفة من $V$ حيث :

$X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

أ- بين أن $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ حيث $O$ هي المصفوفة المنعدمة

ب- نفترض أن $a^2-4b^2\neq0$ بين أن المصفوفة $X$ تقبل مقلوبا في $V$ ينبغي تحديده

## تمرين

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد $e$ و نرمز ب $a^{-1}$ لمماثل $a$ في $(G,*)$ و ليكن $f_a$ التطبيق المعرف من $G$ نحو $G$ بما يلي : $(\forall x\in G)\quad f_a(x)=a*x*a^{-1}$

1) بين أن $f_a$ تشاكل من $(G,*)$ نحو $(G,*)$

2) لتكن $F$ مجموعة التطبيقات $f_a$ ; $a\in G$ .

بين أن $(F,\circ)$ زمرة